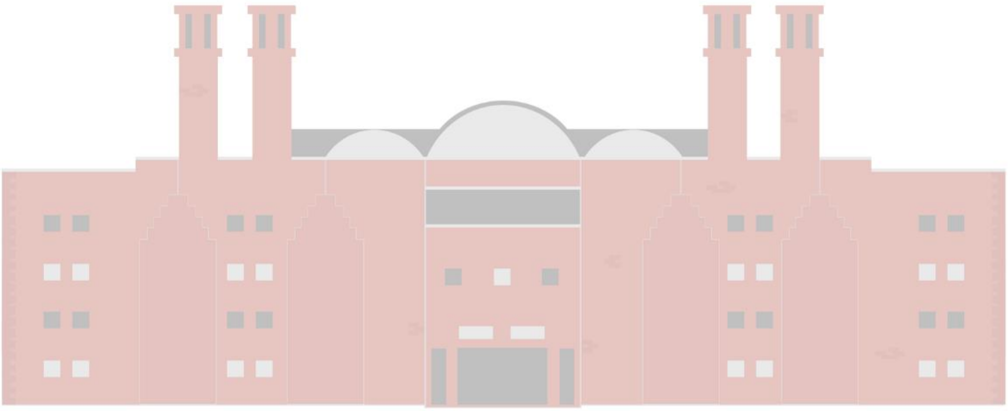
التحليل الرياضي ٣

المحاضرة السادسة

٧ صفحات



الدكتور: معاذ عبد المجيد

التاريخ: ٢٠١٤/١٠/٢

تدريب :

ليكن $\vec{F}=(\vec{\imath}\,.\vec{r})\vec{r}$ احسب $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{F})$ و $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F})$

الحل :

$$\vec{F}=\big((1,0,0)(x,y,z)\big)\vec{r}$$

$$\vec{F}=(x^2,xy,xz)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2 & xy & xz\end{vmatrix}$$

$$=(0,-z,y)$$

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{F})=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)(0,-z,y)=0$$

$$\vec{F}=(x^2,xy,xz)$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F})=\begin{vmatrix}i & j & k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & -z & y\end{vmatrix}$$

$$=(1+1)\hat{\imath}-(0-0)\hat{\jmath}+(0+0)\hat{k}=2\hat{\imath}$$

تدريب :

برهن أن $\vec{V}=r^3\vec{r}$ و أوجد كمونه العددي ثم احسب ∇^2u

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

الحل:

$$\vec{\nabla}\times\vec{V}=\vec{\nabla}\times(r^3\vec{r})=(\vec{\nabla}r^3)\times\vec{r}+(\vec{\nabla}\times\vec{r})r^3=\hat{r}(3r^2)\times\vec{r}+\vec{0}$$
$$=\vec{0}\Rightarrow\vec{V}$$ كموني

$$\vec{V}=\vec{\nabla}u$$

$$\vec{\nabla}r^3=\hat{r}\frac{dr^3}{dr}=3r^2\hat{r}$$

$$\vec{V}=\vec{\nabla}u$$

$$r^3\vec{r}=r^3r\hat{r}=\hat{r}\frac{du}{dr}$$

$$r^4=\frac{du}{dr}\Rightarrow u=\int r^4dr=\frac{r^5}{5}+c$$

$$\nabla^2u=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{du}{dr}\right]=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}=[r^2r^4]=6r^3$$

تدريب: إذا كان $\vec{u}=\left(\vec{r}+\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta+\sin\varphi$

احسب: $\vec{\nabla}\times(\nabla\vec{u}),\nabla^2u,\vec{\nabla}u$

الحل:

$$\vec{\nabla}u=\left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)u$$

$$=\left(1-\frac{2}{r^2}\right)\cos\theta\,\hat{r}-\frac{\hat{\theta}}{r}\left(r+\frac{1}{r^2}\sin\theta\right)+\frac{\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\cos\varphi$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2(1-\frac{2}{r^2}cos\theta\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\sin\theta\left(r+\frac{1}{r^2}\right).\sin\theta\right] + \frac{1}{r^2\sin\theta}(-\sin\varphi)$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}(2r)\cos\theta + \frac{2}{r^2\sin\theta}\left(r+\frac{1}{r^2}\right).\sin\theta.\cos\theta - \frac{\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta} - \frac{\sin\varphi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}u) = \vec{0}$$

مثال: برهن صحة العلاقة:

$$\vec{\nabla}\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r^2}}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dr}}\left[\mathbf{r^2}\frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dr}}\right]$$

البرهان $\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{df}{dr}\right] + 0 + 0$

مثال: أثبت $\vec{\nabla}.\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$:

$$\vec{\nabla}.\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \left(\vec{\nabla}\frac{1}{r^3}\right)\vec{r} + (\vec{\nabla}.\vec{r})\frac{1}{r^3}$$

$$= \hat{r}\left(-\frac{3}{r^4}\right).\hat{r}r + 3\frac{1}{r^3}$$

$$= -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

مثال: أثبت $\vec{\nabla} \wedge (r\vec{r}) = \vec{0}$:

$$(\vec{\nabla}r) \wedge \vec{r} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{r})r = \hat{r} \wedge r\hat{r} + \vec{0}r = \vec{0}$$

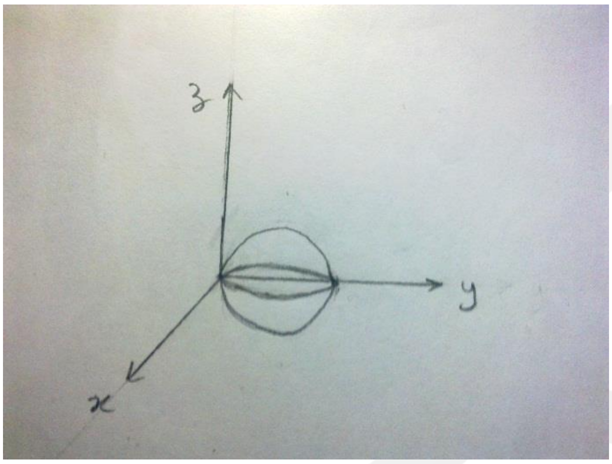
مثال: أثبت أن $\boldsymbol{\vec{\nabla}.\left[\vec{\nabla} \wedge (\vec{r}\ln r)\right] = 0}$:

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{r}\ln r) = (\vec{\nabla}\ln r) \wedge \vec{r} + (\vec{\nabla} \wedge \vec{r})\ln r$$

$$= \left(\hat{r}\frac{1}{r}\right) \wedge r\hat{r} + \vec{0}\ln r$$

مثال: أحسب تدفق $\vec{F} = r\vec{r}$ عبر السطح الموجه

المغلق $\Sigma: x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$



$$I = \oiint_{\Sigma} \vec{F}.\overrightarrow{ds} = \iiint_{\mathbb{R}} \vec{\nabla}.\vec{F}dv = \iiint_{\mathbb{R}} 4dv$$

$$: \vec{\nabla}.\vec{F} = \vec{\nabla}.(r\vec{r}) = (\vec{\nabla}r)\vec{r} + (\vec{\nabla}\vec{r})r =$$

$$\left(\hat{r}\frac{dr}{dv}\right)\vec{r} + 3r = 4r$$

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$$

$$r^2 - 2r.\sin\theta.\sin\varphi = 0$$

$$r = 2\sin\theta.\sin\varphi$$

θ الزاوية من oz إلى $\vec{r}$

$$0 \le \theta \le \pi$$

$0 \le \varphi \le \pi$

حيث φ الزاوية بين مسقط r على oxy والـox

$$I = 4\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\sin\theta\sin\varphi} r r^2 dr$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, [2^4 \sin^4\theta \sin^4\varphi] d\theta$$

تذكر: اليعقوبيان $|J| = r^2 . \sin\theta$

$$= 2^4 \int_0^{\pi} \sin^4\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} \sin^5\theta\, d\theta$$

$$\sin^5\theta = \sin^4\theta \sin\theta = (1-\cos^2\theta)^2 \sin\theta$$

$$\sin^5\theta\, d\theta = -(1-t^2)^2 dt$$

$$\int \sin^5\theta\, d\theta = -(t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^5}{5})$$

الجواب : $\frac{8}{5}\pi \Rightarrow$

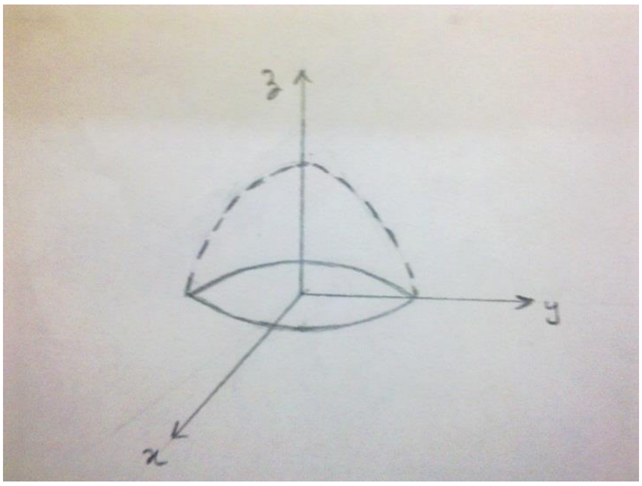
تمرين: احسب جَولان $\vec{F} = (2y\,, 3x\,, -z^2)$ حول المنحني

$$\Gamma: \left\{ z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}\,, \qquad z = 0 \right\}$$

الحل :

$$I = \oint_{\Gamma} \vec{F}\, \vec{dl}$$

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي



$$\vec{dl} = (dx\,, dy\,, 0)$$

$$\vec{F}\,\vec{dl} = (2y\,, 3x\,, -z^2)(dx, dy, 0)$$

$$= 2y\;dx + 3x\;dy$$

$$\Gamma : \begin{cases} x = 3\cos t & 0 \le t \le 2\pi \\ y = 3\sin t \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} 18\sin^2 t\;dt + \int_0^{2\pi} 27\cos^2 t\;dt = 9\pi$$

طريقة ٢) : نظرية ستوكس

$$\vec{ds} = \vec{\nabla}G dxdy = \left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, 1\right) dxdy$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} = \hat{k}$$

$$I = \iint_{R_3} \hat{k}.\left(\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, 1\right) dxdy$$

$$= \iint_{R_3} 1\;dxdy = 9\pi$$

تمرين :

ليكن : $u = \rho(\,sin\varphi - cos\varphi) + \sqrt{p^2 + z^2}$

حيث: $\Sigma : \{ z = 0 , z = 1, (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}$

أثبت أن:

$$I = \oiint_{\Sigma} \overrightarrow{ds} \times \overrightarrow{\nabla u} = \vec{0}$$

الحل:

$$I = \iiint_R (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u)\, dv = \iiint_R \vec{0}\, dv = \vec{0}$$

غالبا ما يكون النجاح حليف هؤلاء الذين يعملون بجرأة، ونادراً ما يكون حليف أولئك المترددين الذي يتهيبون المواقف ونتائجها.

(رونالد .اسبورت)